

Proyecto MaTeX

Matrices

Fco Javier González Ortiz

Directorio

- [Tabla de Contenido](#)
- [Inicio Artículo](#)

© 2004 javier.gonzalez@unican.es
D.L.:SA-1415-2004

ISBN: 84-688-8267-4



MaTeX

MATRICES



Tabla de Contenido

1. Introducción

1.1. Tipos de Matrices

2. Operaciones con matrices

2.1. Suma de matrices.

- Propiedades de la suma de matrices.

2.2. Multiplicación de un número por una matriz.

- Propiedades de la multiplicación por un número.

2.3. Producto de matrices.

- Propiedades del producto de matrices.

3. Matriz Traspuesta.

3.1. Propiedades de la matriz traspuesta

4. Matriz Inversa.

4.1. Propiedades de la matriz Inversa.

5. Matriz reducida

5.1. Transformaciones elementales

5.2. Rango de una matriz

6. Ejercicios

Soluciones a los Ejercicios

Soluciones a los Tests



MaTeX

MATRICES





1. Introducción

El concepto de matriz como tabla ordenada de números es muy antiguo, pero fué en el siglo XIX cuando J.J. Sylvester (1814-1897) utilizó el término matriz y Arthur Cayley (1821-1895) sentó las bases del cálculo matricial. En la actualidad el concepto de matriz subyace en todas las ramas de la Matemática y es de una importancia trascendental.

Definición 1.1 *Se denomina matriz de dimensión $m \times n$ a todo conjunto de elementos dispuestos en m filas y n columnas.*

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \ddots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

De forma abreviada se escribe $A = (a_{ij})_{m \times n}$

1.1. Tipos de Matrices

Matriz fila Es una matriz de dimensión $1 \times n$ o también vector fila

$$A = (a_{11} \quad a_{12} \quad a_{13} \quad \cdots \quad a_{1n})$$

Matriz columna Es una matriz de dimensión $m \times 1$ o también vector colum-

MaTeX

MATRICES



na

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}$$

Matriz Escalonada por filas Es tal que en cada fila el número de ceros que precede al primer elemento no nulo es mayor que en la precedente. Por ejemplo

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 12 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

Matriz Cuadrada Es aquella que tiene igual número de filas que de columnas. Por ejemplo

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & 5 & 6 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

Matriz Simétrica Es aquella que tiene los elementos simétricos a la diagonal principal iguales. Por ejemplo

$$A = \begin{pmatrix} x & a & c \\ a & x & b \\ c & b & x \end{pmatrix}$$



MaTeX

MATRICES



Matriz Identidad Es aquella que tiene en la diagonal principal unos y el resto todos nulos. Por ejemplo

$$I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

2. Operaciones con matrices

2.1. Suma de matrices.

Sean $A = (a_{ij})_{m \times n}$ y $B = (b_{ij})_{m \times n}$ dos matrices de la misma dimensión. Se define la matriz suma $A + B = (a_{ij} + b_{ij})_{m \times n}$ como la matriz que se obtiene de sumar los elementos correspondientes. Por ejemplo:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 5 \\ -1 & 2 & 6 & 4 \\ 0 & 8 & 8 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 5 & 7 \\ 11 & 9 & -3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 6 & 1 & 6 \\ -1 & 5 & 11 & 11 \\ 11 & 17 & 5 & 2 \end{pmatrix}$$

y por ejemplo:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 2 \\ 0 & 8 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 0 & 3 \\ 11 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ -1 & 5 \\ 11 & 17 \end{pmatrix}$$

Al conjunto de todas las matrices de dimensión $m \times n$ le designamos por $M_{m \times n}$.



MaTeX

MATRICES





- **Propiedades de la suma de matrices.**

1. Estable

$$\forall \mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathbf{M}_{m \times n} \quad \mathbf{A} + \mathbf{B} \in \mathbf{M}_{m \times n}$$

2. Asociativa

$$\forall \mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C} \in \mathbf{M}_{m \times n} \quad (\mathbf{A} + \mathbf{B}) + \mathbf{C} = \mathbf{A} + (\mathbf{B} + \mathbf{C})$$

3. Elemento neutro o matriz nula. Tiene todos sus elementos nulos.

$$\forall \mathbf{A} \in \mathbf{M}_{m \times n}, \exists \mathbf{0} \in \mathbf{M}_{m \times n} \quad / \quad \mathbf{A} + \mathbf{0} = \mathbf{A}$$

4. Elemento opuesto

$$\forall \mathbf{A} \in \mathbf{M}_{m \times n}, \exists \mathbf{A}' \in \mathbf{M}_{m \times n} \quad / \quad \mathbf{A} + \mathbf{A}' = \mathbf{0}$$

5. Conmutativa

$$\forall \mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathbf{M}_{m \times n} \quad \mathbf{A} + \mathbf{B} = \mathbf{B} + \mathbf{A}$$

Ejercicio 1. ¿Cuál es la opuesta de la matriz $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$?

MaTeX

MATRICES





2.2. Multiplicación de un número por una matriz.

Sea la matriz $A = (a_{ij})_{m \times n}$ y $\alpha \in R$ un número real. Se define la matriz $\alpha \cdot A = (\alpha \cdot a_{ij})_{m \times n}$ como la matriz que se obtiene de multiplicar los elementos de la matriz por α . Por ejemplo:

$$3 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ -1 & 2 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 9 & -3 \\ -3 & 6 & 18 \end{pmatrix}$$

• Propiedades de la multiplicación por un número.

1. Distributiva respecto a la suma de matrices.

$$\forall \alpha \in R, \forall \mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathbf{M}_{m \times n} \quad \alpha (\mathbf{A} + \mathbf{B}) = \alpha \mathbf{A} + \alpha \mathbf{B}$$

2. Distributiva respecto a la suma de escalares.

$$\forall \alpha, \beta \in R, \forall \mathbf{A} \in \mathbf{M}_{m \times n} \quad (\alpha + \beta) \mathbf{A} = \alpha \mathbf{A} + \beta \mathbf{A}$$

3. Asociativa respecto a los escalares.

$$\forall \alpha, \beta \in R, \forall \mathbf{A} \in \mathbf{M}_{m \times n}, \quad (\alpha \beta) \mathbf{A} = \alpha (\beta \mathbf{A})$$

4. Elemento unidad.

$$\forall \mathbf{A} \in \mathbf{M}_{m \times n}, \exists 1 \in R \quad / \quad 1 \mathbf{A} = \mathbf{A}$$

El conjunto $M_{m \times n}$ con la suma y el producto por un escalar forma un espacio vectorial $(M_{m \times n}, +, \cdot)$.

MaTEX

MATRICES



2.3. Producto de matrices.

Sean $A = (a_{ij})_{m \times p}$ y $B = (b_{ij})_{p \times n}$ dos matrices, donde el número de columnas de A coincide con el número de filas de B . Se define la matriz producto $C = A \cdot B = (c_{ij})$ donde

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^p a_{ik} b_{kj}$$

como la matriz de dimensión $m \times n$ donde cada elemento se obtiene de multiplicar su fila y columna correspondientes.

Por ejemplo en el siguiente producto el elemento c_{11} se obtiene de multiplicar la fila primera por la primera columna :

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 5 \\ -1 & 2 & 6 & 4 \\ 0 & 8 & 8 & 2 \end{pmatrix}_{3 \times 4} \times \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 0 & 3 \\ 11 & 9 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}_{4 \times 2} = \begin{pmatrix} -12 & 13 \\ 58 & 65 \\ 86 & 100 \end{pmatrix}_{3 \times 2}$$

$$c_{11} = 1 \cdot 4 + 3 \cdot 0 + (-1) \cdot 11 + 5 \cdot (-1) = -12$$

$$c_{12} = 1 \cdot 3 + 3 \cdot 3 + (-1) \cdot 9 + 5 \cdot (2) = 13$$

$$c_{22} = (-1) \cdot 3 + 2 \cdot 3 + (6) \cdot 9 + 4 \cdot (2) = 65$$

y análogamente los demás elementos.



MaTEX

MATRICES



Ejemplo 2.1. Calcula el producto de $(2 \ 1 \ 0) \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Solución:

$$(2 \ 1 \ 0) \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = (7 \ 4 \ 3)$$

□

Ejemplo 2.2. Calcula el producto de

$$E \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot F \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Solución: Siendo $\dim(E) = 2 \times 4$ y $\dim(F) = 2 \times 2$, el producto no está definido.

□

Ejemplo 2.3. Calcula el producto de

$$C \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \cdot D \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Solución:

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 \\ 6 \end{pmatrix}$$

□



MaT_EX

MATRICES





- **Propiedades del producto de matrices.**

1. Asociativa

$$\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \cdot \mathbf{C}) = (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) \cdot \mathbf{C}$$

2. Distributiva respecto a la suma de matrices

$$\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} + \mathbf{C}) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} + \mathbf{A} \cdot \mathbf{C}$$

3. Asociativa respecto a la multiplicación por un escalar

$$\forall \alpha \in \mathbb{R}, \quad \alpha \cdot (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) = (\alpha \mathbf{A}) \cdot \mathbf{B}$$

4. Elemento unidad del producto para matrices cuadradas de orden n :

$$\forall \mathbf{A} \in \mathbf{M}_{n \times n}, \exists \mathbf{I}_d \in \mathbf{M}_{n \times n}, \quad / \quad \mathbf{I}_d \cdot \mathbf{A} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{I}_d = \mathbf{A}$$

Dicho elemento se llama **matriz identidad** y tiene los elementos de la diagonal principal "1"s y el resto "0"s. Así:

$$I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

5. En general no se cumple la propiedad conmutativa

No Conmutativa $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} \neq \mathbf{B} \cdot \mathbf{A}$

MaT_EX

MATRICES





Ejemplo 2.4. Comprobar que $A \cdot B \neq B \cdot A$, siendo

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Solución:

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 7 \end{pmatrix}$$

$$B \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 8 \end{pmatrix}$$

Por ello cuando multipliquemos matrices se indicará el orden. Así, si A multiplica a B por la izquierda, AB y si por la derecha BA .

□

► **Nota** Hay que tener especial cuidado con la aplicación de la propiedad conmutativa pues es fuente de muchos errores.

Ejercicio 2. Efectuar y simplificar las expresiones matriciales:

a) $(A + B)^2$

b) $(A + B)(A - B)$

c) $A(B + I_d) - (B + I_d)A$

d) $A^2 - A(I_d + A)$

MaTEX

MATRICES



3. Matriz Traspuesta.

Dada una matriz A , llamamos matriz traspuesta A^t a la matriz que cambia sus filas por sus columnas. Por ejemplo

$$\text{Si } A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \text{ entonces } A^t = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 0 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\text{Si } B = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \text{ entonces } B^t = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

3.1. Propiedades de la matriz traspuesta

- ☞ La traspuesta de $A + B$ es $(A + B)^t = A^t + B^t$.
- ☞ La traspuesta de AB es $(AB)^t = B^t A^t$.
- ☞ Si A es simétrica $A = A^t$.

Ejercicio 3. Siendo A y C matrices cuadradas demostrar que:

- a) $A + A^t$ es simétrica
- b) AA^t es simétrica
- c) Si A es simétrica entonces $C^t AC$ es simétrica



MaTeX

MATRICES





Ejercicio 4. Dadas las siguientes matrices,

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 1 & 4 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad F = (5 \quad 6) \quad G = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ -2 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

calcular cuando sea posible las operaciones que se indican:

- | | | |
|----------------|----------------|------------------|
| a) $2A$ | b) $B + C^t$ | c) $A + B^t$ |
| d) $A + BC$ | e) $G + BC$ | f) $G + CB$ |
| g) $FB + 5D^t$ | h) $3C + 2B^t$ | i) $D^t \cdot C$ |

Ejercicio 5. Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ Hallar las matrices 2×2 tales que

- a) $AB = 0$
 b) $AB = BA$

Ejercicio 6. Sea

$$A = \begin{pmatrix} a & -3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$$

Hallar a sabiendo que AA^t es una matriz diagonal.

MaTEX

MATRICES



Ejercicio 7. Dada $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{10} & 1 & 0 \\ \frac{1}{10} & 0 & 1 \end{pmatrix}$ calcular $A + A^2$

Ejercicio 8. Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ hallar a y b para que se verifique la ecuación matricial:

$$A^2 + aA + bI_d = \mathbf{0}$$

siendo I_d la matriz identidad.

Ejercicio 9. Hallar los elementos desconocidos de la matriz B para que AB sea la matriz nula:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} x & y \\ 1 & 2 \\ u & v \end{pmatrix}$$

Ejercicio 10. Se dice que una matriz cuadrada A , es idempotente si verifica $A^2 = A$. Probar que si A es idempotente, la matriz $C = I - A$, también es idempotente.

Ejercicio 11. Probar que si A es idempotente, la matriz $B = 2A - I$, verifica $B^2 = I$.



MaTEX

MATRICES





4. Matriz Inversa.

Nuestro conocimiento del producto de números reales $\alpha \cdot \alpha^{-1} = 1$ cuando $\alpha \neq 0$ nos invita a preguntarnos si para una matriz cuadrada \mathbf{A} , habrá otra matriz, **la matriz inversa** \mathbf{A}^{-1} de forma que

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^{-1} = \mathbf{I}_d$$

La respuesta es que no todas las matrices cuadradas tienen inversa. Cuando una matriz tiene inversa decimos que es **invertible** o **regular**, en caso contrario decimos que es **singular**.

El cálculo de la matriz inversa es una cuestión importante. No es obvio. Más adelante, en el capítulo de determinantes se verá como calcular la inversa de una matriz cuando exista.

Ejercicio 12. Comprobar que la matriz inversa de

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \text{ es } A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 13. Comprobar que $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -6 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 4 & 1 \end{pmatrix}$

De momento podemos enunciar el siguiente teorema:

MaTeX

MATRICES



Teorema 4.1. Unicidad de la inversa. Si existe la inversa de la matriz A , es única

4.1. Propiedades de la matriz Inversa.

1. El producto de dos matrices invertibles es invertible y su inversa es igual producto de las inversas en orden contrario.

$$(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1} \quad (1)$$

En efecto, para comprobarlo multiplicamos

$$\begin{aligned} (A \cdot B)(B^{-1} \cdot A^{-1}) &= A \cdot B \cdot B^{-1} \cdot A^{-1} \\ &= A \cdot I_d \cdot A^{-1} = A \cdot A^{-1} = I_d \end{aligned}$$

2. La matriz inversa de la traspuesta coincide con al traspuesta de la inversa.

$$(A^t)^{-1} = (A^{-1})^t \quad (2)$$

En efecto,

$$A^t (A^{-1})^t = (A^{-1} A)^t = I^t = I$$

y como la inversa de A^t es única, $(A^t)^{-1} = (A^{-1})^t$.



MaTeX

MATRICES





Inicio del Test Indicar la respuesta a las cuestiones sobre matriz inversa:

1. La inversa de $A \cdot B$ es:

No se sabe $A^{-1}B^{-1}$ $B^{-1}A^{-1}$

2. La inversa de $A \cdot B \cdot C$ es:

No se sabe $A^{-1}B^{-1}C^{-1}$ $C^{-1}B^{-1}A^{-1}$

3. La inversa de $A + B$ es:

No se sabe $A^{-1} + B^{-1}$ $B^{-1} + A^{-1}$

4. La inversa de $A \cdot (B + C)$ es:

$A^{-1}(B + C)^{-1}$ $(B^{-1} + C^{-1})A^{-1}$ $(B + C)^{-1}A^{-1}$

5. La expresión $(A^{-1})^{-1} = A$ es:

Cierta Falsa

Final del Test

Test. Indica si se cumple la propiedad simplificativa en el producto de matrices, es decir

$$AB = AC \Rightarrow B = C$$

(a) Siempre

(b) Nunca

(c) A veces

MaTeX

MATRICES





Inicio del Test Despejar si se puede la matriz X en las ecuaciones:

1. La solución de $X + A = \mathbf{0}$ es:

$$A \qquad \qquad \qquad -A \qquad \qquad \qquad \text{No se puede}$$

2. La solución de $(B + X) = A$ es:

$$A - B \qquad \qquad \qquad B - A \qquad \qquad \qquad \text{No se puede}$$

3. La solución de $X + AB = BA$ es:

$$\mathbf{0} \qquad \qquad \qquad BA - AB \qquad \qquad \qquad \text{No se puede}$$

4. La solución de $X + AA^{-1} = 2I_d$ es:

$$\mathbf{0} \qquad \qquad \qquad I_d \qquad \qquad \qquad \text{No se puede}$$

5. La solución de $AX = B$ es:

$$A^{-1}B \qquad \qquad \qquad BA^{-1} \qquad \qquad \qquad \text{No se puede}$$

6. La solución de $XA = B$ es:

$$A^{-1}B \qquad \qquad \qquad BA^{-1} \qquad \qquad \qquad \text{No se puede}$$

7. La solución de $AX = XB$ es:

$$A^{-1}B \qquad \qquad \qquad BA^{-1} \qquad \qquad \qquad \text{No se puede}$$

Final del Test

MaTEX

MATRICES





5. Matriz reducida

Dada una matriz A se puede reducir o conseguir una matriz escalonada de la anterior usando las **transformaciones elementales** que vimos en el capítulo de sistemas. Como ejemplo, hallamos la matriz reducida de A ,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 5 \\ -2 & 1 & -4 \end{pmatrix} \begin{matrix} f_2 - 3f_1 \\ \sim \\ f_3 + 2f_1 \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -4 & -4 \\ 0 & 5 & 2 \end{pmatrix}$$

$$f_3 + 5/4 f_2 \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -4 & -4 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

MaTeX

5.1. Transformaciones elementales

¿Qué tipo de **transformaciones elementales** podemos realizar en una matriz para que siga siendo equivalente?.

Tres cosas podemos realizar en una matriz para conseguir otro equivalente o su matriz reducida escalonada:

- ☞ Intercambiar de posición dos filas entre si.
- ☞ Multiplicar una fila por un número.
- ☞ Sumar (o restar) a una fila un múltiplo de otra.

MATRICES



Ejemplo 5.1. Hallar la matriz reducida de la matriz A .

Solución:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix} \stackrel{(1)}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(1) $f_2 - 2f_1$ y $f_3 - 3f_1$.

Ejemplo 5.2. Hallar la matriz reducida de la matriz A .

Solución:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -1 & 1 \\ 3 & 3 & 5 & 1 & 2 \\ -2 & 1 & -4 & 2 & -3 \\ 2 & 6 & 4 & 2 & 0 \end{pmatrix} \stackrel{(1)}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -1 & 1 \\ 0 & -3 & -4 & 4 & -1 \\ 0 & 5 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & -2 & 4 & -2 \end{pmatrix} \sim$$

$$\stackrel{(2)}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -1 & 1 \\ 0 & -3 & -4 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & -14 & 20 & -8 \\ 0 & 0 & -14 & 20 & -8 \end{pmatrix} \stackrel{(3)}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -1 & 1 \\ 0 & -3 & -4 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & -14 & 20 & -8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim$$

(1) $f_2 - 3f_1$, $f_2 + 2f_1$ y $f_2 - 2f_1$.

(2) $3f_3 + 5f_2$ y $3f_4 + 2f_2$.

(3) $f_4 - f_3$.



MaTEX

MATRICES



Al número de filas no nulas de la matriz reducida o escalonada le llamamos rango de la matriz.

5.2. Rango de una matriz

Llamamos **rango** de la matriz,

- Al número de filas no nulas de la matriz reducida o escalonada,
ó
- Al número de filas linealmente independientes de la matriz.

Ejemplo 5.3. Escribir una matriz $A_{2 \times 2}$ de rango 1.

Solución:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \implies r(A) = 1$$

□

Ejemplo 5.4. Escribir una matriz $B_{3 \times 3}$ de rango 2.

Solución:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \implies r(B) = 2$$

□



MaTeX

MATRICES





Ejemplo 5.5. Hallar el rango de la matriz A .

Solución:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix} \stackrel{(1)}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \implies r(A) = 1$$

(1) $f_2 - 2f_1$ y $f_3 - 3f_1$.

Ejemplo 5.6. Hallar el rango de la matriz A .

Solución:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 7 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix} \stackrel{(1)}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \implies r(A) = 2$$

(1) $f_2 - 2f_1$ y $f_3 - 3f_1$.

Ejemplo 5.7. Hallar el rango de la matriz A .

Solución:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 7 \\ 3 & 6 & 10 \end{pmatrix} \stackrel{(1)}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \implies r(A) = 3$$

(1) $f_2 - 2f_1$ y $f_3 - 3f_1$.

MaTeX

MATRICES





6. Ejercicios

Ejercicio 14. Calcular por inducción, respecto de n :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^n$$

Ejercicio 15. Calcular por inducción, respecto de n :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^n$$

Ejercicio 16. Dada $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$ hallar x e y para que se cumpla

$$A^2 - xA - yI = 0$$

Ejercicio 17. Estudiar el rango de las matrices:

$$a) A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \quad b) B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 18. Estudiar el rango de las matrices:

MaTEX

MATRICES



$$a) C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & k \end{pmatrix}$$

$$b) D = \begin{pmatrix} 2 & 4 & -1 \\ -2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & k \end{pmatrix}$$

Ejercicio 19. Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$, encontrar todas las matrices de la forma $X = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix}$, tales que $XA = I$, donde I es la matriz unidad de orden 2.



MaTeX

MATRICES



Soluciones a los Ejercicios

Ejercicio 1. La matriz opuesta de A cumple

$$A + (-A) = \mathbf{0}$$

luego

$$-A = \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ -5 & -6 \end{pmatrix}$$



MaTeX

Ejercicio 1

MATRICES



**Ejercicio 2.**

$$a) (A + B)^2 = (A + B)(A + B) = A^2 + AB + BA + B^2$$

$$b) (A + B)(A - B) = A^2 - AB + BA - B^2$$

c)

$$\begin{aligned} A(B + I_d) - (B + I_d)A &= AB + AI_d - BA - I_dA \\ &= AB + A - BA - A \\ &= AB - BA \end{aligned}$$

d)

$$\begin{aligned} A^2 - A(I_d + A) &= A^2 - AI_d - A^2 \\ &= A^2 - A - A^2 \\ &= -A \end{aligned}$$

Importante. Observar que no se ha simplificado $AB - BA$ pues en general se tiene que

$$AB \neq BA$$

MaTEX

MATRICES

Ejercicio 2



**Ejercicio 3.**

a) $A + A^t$ es simétrica pues

$$(A + A^t)^t = A^t + (A^t)^t = A^t + A = A + A^t \quad (\text{la suma es conmutativa})$$

b) $A A^t$ es simétrica pues

$$(A A^t)^t = (A^t)^t (A^t) = A A^t$$

c) Si A es simétrica entonces $C^t A C$ es simétrica pues

$$\begin{aligned} (C^t A C)^t &= C^t A^t (C^t)^t \\ &= C^t A^t C \\ &= C^t A C \end{aligned}$$

Ejercicio 3

MaTeX

MATRICES



**Ejercicio 4.**

$$a) 2 \cdot A = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

$$b) B + C^t = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 3 \\ 2 & 5 & 4 \end{pmatrix}$$

c) No es posible, pues $\dim(A) = 2 \times 2$ y $\dim(B^t) = 3 \times 2$.

$$d) A + B C = \begin{pmatrix} 0 & 10 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

e) No se pueden sumar matrices de distinto orden, pues

$$\dim(G) = 3 \times 3 \neq \dim(B_{2 \times 3} \cdot C_{3 \times 2}) = 2 \times 2$$

$$f) G + C \cdot B = \begin{pmatrix} -4 & 6 & 4 \\ -5 & 4 & 9 \\ -1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

$$g) F \cdot B + 5 D^t = \begin{pmatrix} 4 & 11 & 32 \end{pmatrix}$$

$$h) 3C + 2B^t = \begin{pmatrix} -4 & 7 \\ 3 & 14 \\ 6 & 10 \end{pmatrix}$$

$$i) D^t \cdot C = \begin{pmatrix} -1 & 9 \end{pmatrix}$$

MaTeX

MATRICES



Ejercicio 4



Ejercicio 5. Sea $B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

a) $AB = 0$, luego

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ 2a+c & 2b+d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$a = b = c = d = 0 \Rightarrow B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

b) $AB = BA$

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ 2a+c & 2b+d \end{pmatrix}$$

$$BA = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+2b & b \\ c+2d & d \end{pmatrix}$$

Igualando se obtiene $a = d$ y $b = 0$, quedando las matrices buscadas de la forma

$$B = \begin{pmatrix} a & 0 \\ c & a \end{pmatrix}$$

MaTEX

MATRICES

Ejercicio 5



Ejercicio 6. Sea $A = \begin{pmatrix} a & -3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$

$$AA^t = \begin{pmatrix} a & -3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & 2 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 + 9 & 2a - 12 \\ 2a - 12 & 20 \end{pmatrix}$$

Si AA^t es una matriz diagonal entonces $2a - 12 = 0 \implies a = 6$.

Ejercicio 6



MaTeX

MATRICES





Ejercicio 7.

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{10} & 1 & 0 \\ \frac{1}{10} & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{10} & 1 & 0 \\ \frac{1}{10} & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{2}{10} & 1 & 0 \\ \frac{2}{10} & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A + A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{10} & 1 & 0 \\ \frac{1}{10} & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{2}{10} & 1 & 0 \\ \frac{2}{10} & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ \frac{3}{10} & 2 & 0 \\ \frac{3}{10} & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 7

MaTeX

MATRICES



Ejercicio 8.

$$A^2 = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 & 5 \\ 2 & 11 \end{pmatrix}$$

luego

$$\begin{pmatrix} 14 + 2a + b & 5 + 5a \\ 2 + 2a & 11 - a + b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

obteniendo $a = -1$ y $b = -12$.*MaTeX*

Ejercicio 8

MATRICES





Ejercicio 9.

$$A \cdot B = 0$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & y \\ 1 & 2 \\ u & v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x+2 & y+4 \\ 2x+3-u & 2y+6-v \\ 1+u & 2+v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Igualando queda el sistema de ecuaciones

$$\left. \begin{array}{l} x+2=0 \\ y+4=0 \\ 2x+3-u=0 \\ 2y+6-v=0 \\ 1+u=0 \\ 2+v=0 \end{array} \right\} \begin{array}{l} x=-2 \\ y=-4 \\ \\ \\ u=-1 \\ v=-2 \end{array}$$

MaTeX

MATRICES

Ejercicio 9



Ejercicio 10.

$$\begin{aligned}
 C^2 &= (I_d - A)^2 = \\
 &= (I_d - A)(I_d - A) = \\
 &= I_d^2 - I_d \cdot A - A \cdot I_d + A^2 = \\
 &= I_d - A - A + A^2 = \\
 &= I_d - A - A + A = \\
 &= I_d - A = C
 \end{aligned}$$

Ejercicio 10

MaTEX

MATRICES



Ejercicio 11.

$$\begin{aligned}
 B^2 &= (2A - I_d)(2A - I_d) && (B = 2A - I) \\
 &= 4A^2 - 2A \cdot I_d - 2I_d \cdot A + I_d^2 && (A^2 = A) \\
 &= 4A - 2A - 2A + I_d = I_d
 \end{aligned}$$

Ejercicio 11

*MaT_EX*

MATRICES



Ejercicio 12. Comprobamos que $A \cdot A^{-1} = I_2$,

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 12



MaT_EX

MATRICES



Prueba del Teorema 4.1. Supongamos que hay dos inversas A_1^{-1} y A_2^{-1} .
A partir de

$$I_d = A \cdot A_2^{-1} \quad \text{multiplicando por } A_1^{-1}$$

$$A_1^{-1} = A_1^{-1} \cdot (A \cdot A_2^{-1}) \quad \text{por asociativa}$$

$$A_1^{-1} = (A_1^{-1} \cdot A) \cdot A_2^{-1} = I_d \cdot A_2^{-1} = A_2^{-1}$$

Se concluye que $A_1^{-1} = A_2^{-1}$. Luego si existe la inversa debe ser única. ◀



MaTeX

MATRICES



**Ejercicio 14.**

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = A^2 \cdot A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 4 & 4 \end{pmatrix}$$

Hacemos como hipótesis de inducción para A^n :

$$A^n = \begin{pmatrix} 2^{n-1} & 2^{n-1} \\ 2^{n-1} & 2^{n-1} \end{pmatrix}$$

y comprobamos que:

$$A^{n+1} = A^n \cdot A = \begin{pmatrix} 2^{n-1} & 2^{n-1} \\ 2^{n-1} & 2^{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^n & 2^n \\ 2^n & 2^n \end{pmatrix}$$

Ejercicio 14

MaTEX

MATRICES





Ejercicio 15.

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = A^2 \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 6 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Indagamos la secuencia $1, 3, 6, 10, \dots$,

n	1	2	3	4	\dots	n
elemento a_{13}	1	3	6	10	\dots	
	$\frac{2 \cdot 1}{2}$	$\frac{3 \cdot 2}{2}$	$\frac{4 \cdot 2}{2}$	$\frac{5 \cdot 2}{2}$	\dots	$\frac{(n+1)n}{2}$

y tenemos como hipótesis de inducción para A^n :

$$A^n = \begin{pmatrix} 1 & n & \frac{(n+1)n}{2} \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

MaTeX

MATRICES



En efecto:

$$\begin{aligned}
 A^{n+1} &= A^n \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & n & \frac{(n+1)n}{2} \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \\
 &= \begin{pmatrix} 1 & n+1 & \frac{(n+2)(n+1)}{2} \\ 0 & 1 & n+1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

Ejercicio 15

MaTEX

MATRICES



Ejercicio 16.

$$A^2 = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 9 \\ -6 & -5 \end{pmatrix}$$

$$A^2 - xA - yI = \begin{pmatrix} -2 - 2x - y & 9 - 3x \\ -6 + 2x & -5 - x - y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} -2 - 2x - y = 0 \\ 9 - 3x = 0 \\ -6 + 2x = 0 \\ -5 - x - y = 0 \end{cases} \implies \boxed{x = 3} \quad \boxed{y = -8}$$

Ejercicio 16



MaTeX

MATRICES



**Ejercicio 17.**

a)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \stackrel{(1)}{=} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix} \stackrel{(2)}{=} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

El rango de la matriz es $r(A) = 2$.
 (1) Efectuamos $f_3 - f_2$, $f_2 - f_1$
 (2) $f_3 - f_2$

b)

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \end{pmatrix} \stackrel{(1)}{=} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -2 & -5 \\ 0 & -2 & -4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \stackrel{(2)}{=} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -2 & -5 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

El rango de la matriz es $r(B) = 3$.
 (1) Efectuamos $f_2 - 2f_1$, $f_3 - 3f_1$ y $f_4 - 2f_1$
 (2) Efectuamos $f_3 - f_2$

Ejercicio 17

MaTeX

MATRICES



**Ejercicio 18.**

a)

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & k \end{pmatrix} \stackrel{(1)}{=} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & 3 \\ 0 & -1 & k+2 \end{pmatrix} \stackrel{(2)}{=} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 2k-2 \end{pmatrix}$$

El rango depende de $2k - 2 = 0 \implies k = 1$.

$$\begin{cases} k = 1, & r(C) = 2 \\ k \neq 1 & r(C) = 3 \end{cases}$$

(1) Efectuamos $f_2 - f_1$, $f_3 - 2f_1$ (2) $2f_3 - f_2$

b)

$$D = \begin{pmatrix} 2 & 4 & -1 \\ -2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & k \end{pmatrix} \stackrel{(1)}{=} \begin{pmatrix} 2 & 4 & -1 \\ 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 2k+1 \end{pmatrix}$$

El rango depende de $2k+1 = 0 \implies k = -\frac{1}{2}$. (1) Efectuamos $f_2 + f_1$, $2f_3 - f_1$

$$\begin{cases} k = -\frac{1}{2}, & r(D) = 2 \\ k \neq -\frac{1}{2} & r(D) = 3 \end{cases}$$

MaTeX

MATRICES



**Ejercicio 19.**

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Queda un sistema lineal de 4 ecuaciones y 6 incógnitas, compatible indeterminado

$$\left. \begin{array}{l} a + b - 2c = 1 \\ -b + 2c = 0 \\ d + e - 2f = 0 \\ -e + 2f = 1 \end{array} \right\} \begin{array}{l} a = 1 \\ b = 2c \\ d = 1 \\ e = 2f - 1 \end{array}$$

Todas las soluciones se pueden escribir:

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 2c & c \\ 1 & 2f - 1 & f \end{pmatrix}$$

Ejercicio 19

MaTeX

MATRICES



Soluciones a los Tests

Solución al Test: La propiedad simplificativa en el producto de matrices,

$$AB = AC \Rightarrow B = C$$

solo se cumple cuando existe A^{-1} . Sean

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}$$

Se tiene que

$$A \cdot B = A \cdot C = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

y sin embargo

$$B \neq C$$

Final del Test



MaTEX

MATRICES



Índice alfabético

conmutativa, 10

matriz, 3

columna, 3

cuadrada, 4

dimensión de, 3

escalonada, 4

fila, 3

identidad, 5, 10

inversa, 15

invertible, 15

nula, 6

opuesta, 6

por un número, 7

producto de, 8

rango de, 21

reducida, 19

regular, 15

simétrica, 4

singular, 15

suma de, 5

traspuesta, 12

propiedades

de la inversa, 16

de la suma, 6

de la traspuesta, 12

del producto, 10

del producto por un número,
7

transformaciones elementales, 19



MaTeX

MATRICES

